

一、單選題：10 分

- () 1. 從裝有 3 個白球，2 個黑球的箱子抽出一球，每球備取中之機會均等。若由箱中取球 5 次，每次取出 1 球，取後放回。若以隨機變數 X 表抽中白球的次數，則試求 $X=2$ 的機率為下列哪一個選項？

(A) $\frac{6}{625}$ (B) $\frac{12}{625}$ (C) $\frac{72}{625}$ (D) $\frac{144}{625}$ (E) $\frac{28}{625}$

二、多選題：10 分

- () 2. 下列哪些選項為伯努力試驗？

(A) 丟一枚硬幣一次，討論其出現正面的情況
 (B) 丟一枚骰子一次，討論其出現點數的情況
 (C) 丟一枚骰子一次，討論其出現點數為偶數的情況
 (D) 從裝有 3 個白球，2 個黑球的箱子抽出一球，討論其抽出黑球的情況
 (E) 從 52 張撲克牌抽出一張，討論其點數出現的情況

三、填充題：每題 12 分，共 60 分

3. 某百貨公司為了增加買氣，決定舉辦摸彩活動，活動內容如下：

每位顧客從箱中的 10 支籤，抽中 1 支的中獎籤，可獲得百貨公司精心準備的來店禮，其中每支籤被抽中的機會均等。設有 1000 位顧客參加此抽獎活動，令 X 表 1000 位顧客參加抽獎活動的中獎人數，若 X 的期望值為 E ， X 的標準差為 σ ，則數對 $(E, \sigma) =$

_____。

(10 分)

(10 分)

4. 投擲兩公正骰子 10 次，以隨機變數 X 代表出現點數和為 9 的次數，試求 X 的變異數為

_____。

5. 現箱中有 10 顆大小相同的球，3 顆紅色球，5 顆綠色球，2 顆藍色球。今從箱中任取一球，每球被取到的機會均等，觀察其顏色後放回。重複上述動作多次，直到取到藍色球停止，令隨機變數 X 表取球次數，則期望值 $E(X)$ 與變異數 $\text{Var}(X)$ 的乘積為_____。

6. 隨機變數 $X \sim G(p)$ ，若 X 的變異數 $\text{Var}(X) = 6$ ，則 $p =$ _____。

7. 假設連續投擲一般子 5 次，若出現質數點的次數不超過 2 次，則判定 $p = \frac{1}{3}$ 。若投擲出質數點的機率為 $\frac{1}{3}$ ，依檢定準則判定 $p = \frac{1}{3}$ 的機率為 $k\%$ ，則 $k =$ _____。(整數以下四捨五入)

四、計算題：20 分

8. 投擲一個公正骰子 3 次，令隨機變數 X 表 3 次中出現點數 6 的次數，試回答以下問題：
- (1) 3 次都未出現點數 6 的機率 $P(X=0)$ 為多少？ (10 分)
 - (2) 3 次中最多出現 2 次 6 點的機率 $P(X \leq 2)$ 為多少？ (10 分)

一、單選題：10 分

- (D) 1. 從裝有 3 個白球, 2 個黑球的箱子抽出一球, 每球備取中之機會均等。若由箱中取球 5 次, 每次取出 1 球, 取後放回。若以隨機變數 X 表抽中白球的次數, 則試求 $X=2$ 的機率為下列哪一個選項?

- (A) $\frac{6}{625}$ (B) $\frac{12}{625}$ (C) $\frac{72}{625}$ (D) $\frac{144}{625}$ (E) $\frac{28}{625}$

解：抽中白球的機率為 $\frac{3}{5}$, 抽中黑球的機率為 $\frac{2}{5}$, 則所求為 $C_2^5 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{144}{625}$,

故選(D)。

二、多選題：10 分

- (AC) 2. 下列哪些選項為伯努力試驗?

D

- (A) 丟一枚硬幣一次, 討論其出現正面的情況
(B) 丟一枚骰子一次, 討論其出現點數的情況
(C) 丟一枚骰子一次, 討論其出現點數為偶數的情況
(D) 從裝有 3 個白球, 2 個黑球的箱子抽出一球, 討論其抽出黑球的情況
(E) 從 52 張撲克牌抽出一張, 討論其點數出現的情況

解：一個試驗只有兩種結果, 則稱為伯努力試驗, 故選(A)(C)(D)。

三、填充題：每題 12 分, 共 60 分

3. 某百貨公司為了增加買氣, 決定舉辦摸彩活動, 活動內容如下:

每位顧客從箱中的 10 支籤, 抽中 1 支的中獎籤, 可獲得百貨公司精心準備的來店禮, 其中每支籤被抽中的機會均等。設有 1000 位顧客參加此抽獎活動, 令 X 表 1000 位顧客參加抽獎活動的中獎人數, 若 X 的期望值為 E , X 的標準差為 σ , 則數對 $(E, \sigma) =$

$(100, 3\sqrt{10})$ 。

解：由 $X \sim B(1000, \frac{1}{10})$, 由二項分布的期望值公式,

可得 $E = 1000 \times \frac{1}{10} = 100$, $\sigma = \sqrt{1000 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10}} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$,

故所求為 $(100, 3\sqrt{10})$ 。

4. 投擲兩公正骰子 10 次, 以隨機變數 X 代表出現點數和為 9 的次數, 試求 X 的變異數為

$\frac{80}{81}$ 。

解：投擲兩公正骰子和為 9 的機率為 $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, 故變異數為 $10 \times \frac{1}{9} \times \frac{8}{9} = \frac{80}{81}$ 。

5. 現箱中有 10 顆大小相同的球，3 顆紅色球，5 顆綠色球，2 顆藍色球。今從箱中任取一球，每球被取到的機會均等，觀察其顏色後放回。重複上述動作多次，直到取到藍色球停止，令隨機變數 X 表取球次數，則期望值 $E(X)$ 與變異數 $\text{Var}(X)$ 的乘積為 100。

解：每次取到藍色球的機率為 $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ ，故 $X \sim G\left(\frac{1}{5}\right)$ ，則

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5, \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-\frac{1}{5}}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{25}} = \frac{4}{5} \times 25 = 20,$$

故所求為 $5 \times 20 = 100$ 。

6. 隨機變數 $X \sim G(p)$ ，若 X 的變異數 $\text{Var}(X) = 6$ ，則 $p = \underline{\frac{1}{3}}$ 。

解：由 $X \sim G(p)$ ，

$$\text{可得 } \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2} = 6 \Rightarrow 6p^2 = 1-p$$

$$6p^2 + p - 1 = (3p-1)(2p+1) = 0,$$

故 $p = \frac{1}{3}$ 或 $-\frac{1}{2}$ (不合)。

7. 假設連續投擲一骰子 5 次，若出現質數點的次數不超過 2 次，則判定 $p = \frac{1}{3}$ 。若投擲出質

數點的機率為 $\frac{1}{3}$ ，依檢定準則判定 $p = \frac{1}{3}$ 的機率為 $k\%$ ，則 $k = \underline{79}$ 。(整數以下四捨五入)

$$\text{解：} P(X \leq 2 | p = \frac{1}{3}) = P(X=0 | p = \frac{1}{3}) + P(X=1 | p = \frac{1}{3}) + P(X=2 | p = \frac{1}{3})$$

$$= C_0^5 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^5 + C_1^5 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^4 + C_2^5 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$= \frac{32 + 80 + 80}{243} = \frac{192}{243} = 79.01\%,$$

故 $k = 79$ 。

四、計算題：20 分

8. 投擲一個公正骰子 3 次，令隨機變數 X 表 3 次中出現點數 6 的次數，試回答以下問題：

(1) 3 次都未出現點數 6 的機率 $P(X=0)$ 為多少？ (10 分)

(2) 3 次中最多出現 2 次 6 點的機率 $P(X \leq 2)$ 為多少？ (10 分)

$$\text{解：(1) } P(X=0) = C_0^3 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}.$$

$$(2) P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= 1 - P(X=3) = 1 - C_3^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{215}{216}.$$